

# МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ДЛЯ АВТОМАТИЗИРОВАННОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ МЕТЕОПРОГНОЗОВ

А.Д. Данилов, А.В. Пилеич

В данной статье предложен вариант автоматизации оперативных метеосводок таких опасных явлений погоды, как гроза, град, ливень, шквал. Приведены примеры расчетов параметров конвекции и дискриминантных функций расчетных методов

Ключевые слова: автоматизированное проектирование, дискриминантная функция, параметры конвекции, опасные явления погоды

Гроза, ливневой дождь, град и шквальное усиление ветра взаимосвязанные явления погоды. Они имеют общую природу возникновения и как правило образуются в кучево-дождевых облаках. Эти атмосферные явления относятся к опасным явлениям погоды. Так, например, гроза относится к одним из самых опасных для человека природных явлений, по количеству зарегистрированных смертных случаев только наводнения приводят к большим людским потерям. В связи с этим, прогнозам данных явлений необходимо уделять значительное внимание. Для европейской территории России применяются методы Н. В. Лебедевой, Б. Е. Пескова и Г. Д. Решетова. Основными исходными данными, для проведения оперативных расчетов возникновения гроз, ливней, града и шквалов служат данные температурно-ветрового зондирования атмосферы, проводимые на метеостанциях крупных городов в 00 и 12 часов СГВ. Эти данные наносятся на бланки аэрологических диаграмм, по которым производятся большое количество расчетов. Что бы перейти к автоматизации данного процесса ниже будут приведены математические основы выполнения данной задачи.

При расчетах параметров возникновения гроз, ливней, града и шквалов необходимо решить ряд частных задач, представленных в виде структурной схемы (рис.1).

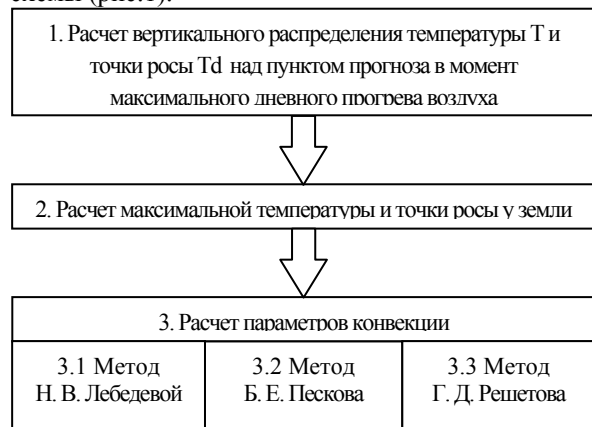


Рис. 1. Структурная схема алгоритма расчета параметров возникновения гроз, ливней, града и шквалов

По методу Н. В. Лебедевой рассчитываются следующие параметры конвекции[4]:

- 1) суммарный дефицит точки росы на изобарических поверхностях 850, 700 и 500 гПа;
- 2) разность между максимальной температурой и точкой росы у земли  $T_{max} - Td_0$ ;
- 3) толщина конвективно-неустойчивого слоя  $\Delta h$ ;
- 4) средний уровень конденсации  $h_{ср.конд.}$ ;
- 5) средний уровень конвекции  $H_{ср.конв.}$ ;
- 6) температура на среднем уровне конвекции  $T_{ср.конв.}$ ;
- 7) среднее отклонение кривой состояния от кривой стратификации в слое от  $h_{ср.конд.}$  до  $H_{ср.конв.}$ ;
- 8) средняя мощность конвективных облаков (разность средних уровней конвекции и конденсации)  $\Delta H$ .

Для всех перечисленных параметров имеются критические значения, начиная с которых получают определенное развитие конвективные явления. В табл.1 представлены сочетания значений этих параметров, при которых следует прогнозировать различные конвективные явления.

Порядок расчета по методу Б. Е. Пескова следующий:

1. Определяют величину  $(T' - T)_{500}$ , где  $T'$  и  $T$  – температура соответственно на кривой состояния и кривой стратификации на уровне 500 гПа. Если полученная величина окажется меньше нуля, то в прогнозе дается отсутствие грозы.

2. Определяют  $T_{hконв.}$  – температуру на уровне конвекции (на уровне пересечения кривых стратификации и состояния). Если  $T_{hконв.} \geq -22,5^\circ\text{C}$ , то в прогнозе дают отсутствие грозы и дальнейшие операции не выполняют

3. Определяют средний дефицит точки росы в слое 850-500 гПа:

$$(T - Td)_{cp} = \frac{1}{3} [(T - Td)_{850} + (T - Td)_{700} + (T - Td)_{500}]. \quad (1)$$

Если  $(T - Td)_{cp} > 10^\circ\text{C}$ , то прогнозируется отсутствие грозы.

4. В случаях когда Если  $(T - Td)_{cp} < 10^\circ\text{C}$ , рассчитывается функция:

$$u = 0,4(T' - T)_{600} - 0,05(T' - T)_{500} + 0,4\Delta^2 p - 0,07|\Delta V|_{700}^{300}, \quad (2)$$

где  $\nabla^2 p = 0,5(p_1 + p_2 + \dots + p_8 - 8 p_u)$  – лапласиан приземного давления;

$|\Delta V|_{700}^{300}$  – модуль разности векторов ветра на уровнях 700 и 300 гПа.

$\nabla^2 p$  вычисляется для точки на приземной карте, которая имеет те же координаты, что начало полусуточной траектории на карте  $AT_{700}$ . Каждая из восьми точек ( $p_1, p_2, \dots, p_8$ ) берется на удалении 250 км от центральной точки  $p_u$ .

В точке с теми же координатами на картах  $AT_{300}$  и  $AT_{700}$  снимаются данные для расчета  $|\Delta V|_{700}^{300}$ .

В прогнозе указываются грозы по району, если  $u \geq -0,5$ .

По методу Г. Д. Решетова, для прогноза грозы по прогностическим кривым стратификации и состояния, построенным до уровня 100 гПа, рассчитываются следующие предикторы.

1. Высота верхней границы облаков  $H_{BFO}$ . Она определяется как уровень, где отрицательная энергия неустойчивости атмосферы становится равной положительной энергии неустойчивости.

2. Температура в облаке на уровне  $H_{BFO}$ . Практически эта температура ( $T_{BFO}$ ) снимается с кривой состояния на уровне  $H_{BFO}$ .

Критические значения параметров конвекции, при которых наиболее вероятно развитие конвективных явлений

$\sum_{850}^{500} (T - Td)$ , °C	$(T_{max} - Td_0)$ , °C	$\Delta h$ , гПа	$h_{ср.конв.}$ , км	$H_{ср.конв.}$ , км	$T_{ср.конв.}$ , °C	$\Delta \bar{T}$ , °C	$\Delta H$ , км	Конвективные явления
>25	-	-	-	-	-	-	-	Развития конвекции не ожидается
-	>16	-	-	-	-	-	-	
$\leq 25$	$\leq 16$	>10	~1,5	$\geq 6$	<-22,5	>4	~4,5	Слабый ливневой дождь, возможна гроза или сухая гроза
$\leq 20$	$\leq 14$	>20	~1,5	>5	-22,5 < T < -10	$\geq 3$	>3,5	Ливневой дождь без грозы
$\leq 20$	$\leq 14$	>30	~1,5	$\geq 8$	<-22,5	$\geq 3$	>6,5	Ливневой дождь, местами гроза
<16	~10	>60-100	1,5 > h > 1,0	>8	<-22,5	$\geq 3$	$\geq 7,5$	Сильный ливневой дождь, и гроза
<16	~10	>60-100	1,5 > h > 1,0	>8	<-22,5	>3, но $\Delta T_{max} > 4$	$\geq 7,5$	Сильный ливневой дождь, град, гроза

3. Вертикальная мощность облаков в слое отрицательных температур  $\Delta H$  км. Эта величина рассчитывается как разность  $H_{BFO}$  и высоты, на которой кривая состояния пересекает нулевую изотерму. Далее рассчитывается дискриминантная функция

$$L = 0,1\Delta H - 0,042 T_{BFO} - 0,562. \quad (3)$$

При  $L \geq 0$ , прогнозируются грозы, при  $L < 0$  – отсутствие гроз.

Для прогноза града рассчитывается еще одна функция

$$L_1 = 0,52H_{BFO} - 0,12 T_{BFO} - 4,73. \quad (4)$$

Град прогнозируется при  $L_1 \geq 0$ .

Для прогноза шквала определяются сумма отклонений кривой стратификации от кривой состояния и разность между максимальной температурой воздуха у земли и температурой на поверхности 500 гПа по формулам [2,3]:

$$\sum_{850}^{500} (T - T) = (T - T)_{850} + (T - T)_{700} + (T - T)_{600} + (T - T)_{500}; \quad (5)$$

$$\Delta T_{max}^{500} = T_{max} - T_{500}. \quad (6)$$

Затем рассчитывается дискриминантная функция:

$$L_2 = 0,039 \sum_{850}^{500} (T' - T) + 0,025 \Delta T_{max}^{500} - 1,162. \quad (7)$$

При  $L_2 > 0$  в прогнозе следует указать наличие шквала и затем рассчитать максимальную скорость ветра при шквале.

Для расчета  $V_{max}$  необходимо предварительно определить нулевую температуру смоченного термометра, приведенную влажноадиабатически к уровню земли  $\Theta_0$  [2]:

$$\Theta_0 = 0,05(p_0 - \frac{p_{T=0} + p_{Td=0}}{2}). \quad (8)$$

Рассчитывают также среднюю скорость ветра в слое от поверхности земли до уровня 500 гПа:

$$\bar{V} = 0,25(V_0 + V_{850} + V_{700} + V_{500}). \quad (9)$$

Максимальная скорость ветра при шквале определяется по графику (рис. 2) [2,3], входными параметрами в который являются значения  $\bar{V}$  и  $\Delta T = T_{max} - \Theta$ .

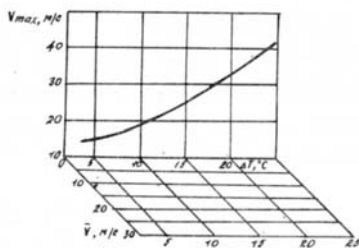


Рис. 2. График для прогноза максимальной скорости ветра при шквале

Операции, выполняемые на аэрологической диаграмме, производятся с помощью сухих адиабат, влажных адиабат и изограмм. Далее будут рассмотрены

Изменения температуры в воздушной частице, перемещающейся по сухоадиабатическому закону, описываются соотношением:

$$\frac{T_i}{T_0} = \left( \frac{p_i}{p_0} \right)^{0,286} \quad (10)$$

В среднем угловые коэффициенты сухих адиабат ( $K_T$ ) на основных изобарических поверхностях составляют:

p, гПа	850	700	500	300
$K_T$	0,094	0,11	0,15	0,22

У земной поверхности диапазон изменения температуры воздуха более широк, поэтому необходимо учитывать влияние температуры на величину углового коэффициента:

T, °C	0–4,9	5–14,9	15–24,9	25–29,9	> 30
$K_T$	0,085	0,087	0,090	0,092	0,095

Таким образом, сухоадиабатические изменения температуры в координатных осях, принятых на аэрологической диаграмме, при сравнительно небольших изменениях давления можно рассчитывать по формуле:

$$T = T_0 - K_T (p_0 - p_i) \quad (11)$$

2. Средние угловые коэффициенты изограмм  $K_q$  на основных изобарических поверхностях составляют:

p, гПа	850	700	500	300
$K_q$	0,015	0,019	0,025	0,03

У земной поверхности величина углового коэффициента изограмм в зависимости от температуры изменяется следующим образом:

T, °C	0–9,9	10–19,9	20–25,9	26–27,9	28–30	> 30
$K_q$	0,016	0,017	0,018	0,019	0,02	0,021

3. Аналитическое выражение влажноадиабатических процессов – задача более сложная. Объясняется это тем, что

влажноадиабатический градиент температуры изменяется в широких пределах. В связи с этим рассматривать влажные адиабаты в координатах аэрологической диаграммы как прямые линии можно лишь на очень ограниченных участках, например при учете вертикальных токов на какой-либо изобарической поверхности. Для этих целей можно использовать следующие значения угловых коэффициентов влажных адиабат  $K_B$  на основных изобарических поверхностях:

p, гПа	850	700	500	300
$K_B$	0,05	0,07	0,12	0,21

При построении же кривой состояния, т.е. при больших изменениях давления, необходимо от шкалы давления переходить к шкале высот. Тогда расчеты по влажноадиабатическому закону можно производить с применением влажноадиабатического градиента  $\gamma_B$ , выраженного, как принято, в градусах на 100 м высоты.

Значения  $\gamma_B$  для каждой ограниченной толщины слоя атмосферы (в данной задаче для слоев толщиной по 50 гПа) можно вычислять по формуле:

$$\gamma = \frac{p + 5420,93 \frac{E}{T' + 273,15}}{p + 8397212,04 \frac{E}{(T' + 273,15)^2}}, \quad (12)$$

где  $p$  – атмосферное давление;

$E$  – максимальная упругость водяного пара:

$$E = 6,1078 \cdot e^{\frac{17,13T'}{235 + T'}} \quad (13)$$

$T'$  – температура на кривой состояния на уровне, для которого производится расчет.

Переход от шкалы давления к шкале высот удобно выполнять с помощью формулы Бабине:

$$H_2 - H_1 = 16000 \frac{p_1 - p_2}{p_1 + p_2} (1 + 0,004T) \quad (14)$$

4. Уровень конденсации при адиабатическом перемещении воздушной частицы с некоторой изобарической поверхности определяется как точка пересечения двух прямых – сухой адиабаты и изограммы. Например, для поверхности 300 гПа:

- сухая адиабата имеет вид:

$$T = T_{300} + 0,22 (p - 300), \quad (15)$$

- изограмма:

$$Td = Td_{300} + 0,03 (p - 300). \quad (16)$$

Поскольку на уровне конденсации  $T = Td$ , приравняв правые части равенств и решив полученное уравнение относительно  $p$ , найдем давление на уровне конденсации:

$$p_{K300} = 5,26(Td_{300} - T_{300} + 57); \quad (17)$$

$$p_{K500} = 8(Td_{500} - T_{500} + 62,5); \quad (18)$$

$$p_{K700} = 10,64(Td_{700} - T_{700} + 65,8); \quad (19)$$

$$p_{K850} = 12,66(Td_{850} - T_{850} + 67,15). \quad (20)$$

5. Расчет максимальной температуры у земли по сухоадиабатическому соотношению.

Во-первых, надо определить значение температуры например, на уровне 800 гПа (для

второй половины мая, когда сухоадиабатическое распределение температуры наблюдается в часы максимального прогрева от земной поверхности до уровня 800 гПа.). Сделать это можно, проинтерполировав температуру на кривой стратификации между поверхностями 850 и 700 гПа:

$$T_{800} = T_{850} - \frac{T_{850} - T_{700}}{150} 50. \quad (21)$$

Во-вторых, полученную температуру  $T_{\max}$  надо сухоадиабатически привести к приземному давлению. Это можно сделать по формуле:

$$T_{\max} = (T_{800} + 273,15) \left( \frac{p_0}{800} \right)^{0,286} - 273,15. \quad (22)$$

#### 6. Расчет уровня конденсации у земли.

Изменения в приземном слое с высотой температуры и точки росы можно представить выражениями:

$$T = T_{\max} - K_T(p_0 - p); \quad (23)$$

$$Td = Td_0 - K_q(p_0 - p); \quad (24)$$

Поскольку на уровне конденсации  $T = Td$ , приравняв правые части равенств и решив полученное соотношение относительно  $p$ , получим:

$$p_K = p_0 + \frac{Td_0 - T_{\max}}{K_T - K_q}. \quad (25)$$

7. Расчет температуры на кривой стратификации выполняется путем интерполяции. Например, для расчета температуры на уровне 600 гПа используем известные  $T_{700}$  и  $T_{500}$ :

$$T_{600} = T_{700} - K(T_{700} - T_{500}). \quad (26)$$

Коэффициент  $K$  с использованием формулы Бабины [1] определим как отношение соответствующих разностей высот  $\frac{H_{600} - H_{700}}{H_{500} - H_{700}}$ :

$$K = \frac{16000 \frac{700-600}{700+600} \left( 1 + 0,004 \frac{T_{700} + T_{600}}{2} \right)}{16000 \frac{700-500}{700+500} \left( 1 + 0,004 \frac{T_{700} + T_{500}}{2} \right)} \approx \frac{(700-600)(700+500)}{(700+600)(700-500)} \approx 0,46. \quad (27)$$

С помощью таких же приемов были выведены рабочие формулы для определения  $T$  и  $Td$  на основных изобарических поверхностях. Например, после учета вертикальных токов на поверхности 300 гПа получим, что в точке IV давление равно  $p_{IV}$ , температура  $T_{IV}$ . Соответственно в окрестностях поверхности 500 гПа получим точку с параметрами  $p_{III}$  и  $T_{III}$ . Тогда значения температуры и точки росы на поверхности 300 гПа получим путем интерполяции между точками III и IV:

$$T_{300} = T_{IV} + \frac{(300 - p_{IV})(p_{III} + p_{IV})}{(300 + p_{IV})(p_{III} - p_{IV})} (T_{III} - T_{IV}), \quad (28)$$

$$Td_{300} = Td_{IV} + \frac{(300 - p_{IV})(p_{III} + p_{IV})}{(300 + p_{IV})(p_{III} - p_{IV})} (Td_{III} - Td_{IV}). \quad (29)$$

8. Определение температуры на уровне конвекции. Если уровень конвекции лежит между поверхностями 500 и 300 гПа, то с использованием влажноадиабатического градиента  $\gamma_B$  температуру на этом уровне можно определить из соотношения:

$$T_{\text{конв}} = T'_{500} - \gamma_B (H_{\text{конв}} - H_{500}). \quad (30)$$

То же самое можно сделать на кривой, стратификации:

$$T_{\text{конв}} = T_{500} - (T_{500} - T_{300}) \frac{(H_{\text{конв}} - H_{500})}{(H_{300} - H_{500})}. \quad (31)$$

Если определить из первой формулы  $H_{\text{конв}} - H_{500}$ , учесть, что влажноадиабатический градиент на этих высотах примерно равен  $0,88 \text{ } ^\circ\text{C}/100 \text{ м}$ , подставить то и другое во вторую формулу и выполнить возможные упрощения, то получим рабочую формулу для определения температуры воздуха на уровне конвекции:

$$T_{\text{конв}} = \frac{35,2 \left( 1 + 0,004 \frac{T_{500} + T_{300}}{2} \right) T_{500} - T_{500} T'_{500} + T_{300} T'_{500}}{35,2 \left( 1 + 0,004 \frac{T_{500} + T_{300}}{2} \right) - T_{500} + T_{300}}. \quad (32)$$

Если уровень конвекции выше 300 гПа:

$$T_{\text{конв}} = \frac{29,4 \left( 1 + 0,004 \frac{T_{300} + T_{200}}{2} \right) T_{300} - T_{300} T'_{300} + T_{200} T'_{300}}{29,4 \left( 1 + 0,004 \frac{T_{300} + T_{200}}{2} \right) - T_{300} + T_{200}}. \quad (33)$$

Для уровня конвекции находится между поверхностями 700 и 500 гПа:

$$T_{\text{конв}} = \frac{18,8 \left( 1 + 0,004 \frac{T_{700} + T_{500}}{2} \right) T_{700} - T_{700} T'_{700} + T_{500} T'_{700}}{18,8 \left( 1 + 0,004 \frac{T_{700} + T_{500}}{2} \right) - T_{700} + T_{500}}. \quad (34)$$

9. Модуль разности векторов ветра на уровнях 700 и 300 гПа рассчитывается по теореме косинусов:

$$|\Delta V| = \sqrt{V_{700}^2 + V_{300}^2 - 2V_{700}V_{300} \cos(dd_{700} - dd_{300})}. \quad (35)$$

10. При определении толщины конвективно-неустойчивого слоя необходимо определить температуру  $T_c$  в точке пересечения двух прямых: сухой адиабаты, проведенной от земли с учетом максимальной температуры, и кривой стратификации. Она вычисляется так:

$$T_c = \frac{K_T T_0 (p_0 - 850) + T_{\max} (T_{850} - T_0)}{K_T (p_0 - 850) + T_{850} - T_0}. \quad (36)$$

11. Для определения давления на верхней границе конвективно-неустойчивого слоя ( $p_{н.с.}$ ) используем следующую рабочую формулу

$$p_{н.с.} = \frac{p_0 Td_{850} - 850 Td_0 - T_c (p_0 - 850) + K_q p_c (p_0 - 850)}{K_q (p_0 - 850) + Td_{850} - Td_0}. \quad (37)$$

12. Для определения давления на среднем уровне конденсации  $p_{\text{ср.конд.}}$  используется формула:

$$p_{\text{ср.конд.}} = \frac{T_{\max} - Td_{\text{ср.н.с.}} + K_q p_{\text{ср.н.с.}} - K_T p_0}{K_q - K_T}. \quad (38)$$

13. Для определения уровня  $p_{н.}$  на котором в облаке температура равна 0, запишем выражение, отображающее изменение температуры по влажноадиабатическому закону выше среднего уровня конденсаций приравняем его нулю:

$$T_{\text{ср.конд.}} - 160 \frac{p_{\text{ср.конд.}} - p_{H0}}{p_{\text{ср.конд.}} - p_{H0}} \left( 1 + 0,004 \frac{T_{\text{ср.конд.}} - T_{600}}{2} \right) \gamma'_{\text{ср}} = 0. \quad (39)$$

В этом уравнении  $\gamma'_{\text{ср}}$  представляет собой среднее значение влажноадиабатического градиента температуры в слое от уровня конденсации до 600 гПа, т.е. в слое, в пределах которого температура в облаке, как правило, переходит через 0.

Решив это равенство относительно  $p_{H0}$ , получим рабочую формулу:

$$p_{H0} = \frac{160\gamma_{cp} \left( 1 + 0,004 \frac{T_{cp,конд.} + T_{600}}{2} \right) - T_{cp,конд.}}{160\gamma_{cp} \left( 1 + 0,004 \frac{T_{cp,конд.} + T_{600}}{2} \right) + T_{cp,конд.}} p_{cp,конд.} \quad (40)$$

14. Давление на уровне нулевой изотермы, если она лежит между поверхностями 850 и 700 гПа, можно рассчитать, применив формулу интерполяции температуры между этими поверхностями:

$$T_{850} - \frac{(850 - p_{T=0})(850 + 700)}{(850 - p_{T=0})(850 + 700)} (T_{850} - T_{700}) = 0 \quad (41)$$

Решив это уравнение относительно  $p_{T=0}$  получим:

$$p_{T=0} = \frac{8783,33(T_{850} - T_{700}) - 850T_{850}}{10,33(T_{850} - T_{700}) + T_{850}} \quad (42)$$

Если нулевая изотерма расположена между поверхностями 700 и 600 гПа, то используется формула:

$$p_{T=0} = \frac{9100(T_{700} - T_{600}) - 700T_{700}}{13(T_{700} - T_{600}) + T_{700}} \quad (43)$$

15. График на рис. 1, предназначенный для прогноза максимальной скорости ветра при шквалах, хорошо аппроксимируется кривой вида:

$$V_{max} = 0,036(\Delta T_{max} + 0,25\bar{V})^{2,07} + 14,3 \quad (44)$$

Таким образом, в данной статье представлена математическая модель расчетов параметров конвекции, которая может быть использована для автоматизации расчетных методов, применяемых при прогнозировании гроз, града, ливней и шквалов, без использования аэрологической диаграммы.

#### Литература

1. Матвеев Л.Т. Основы общей метеорологии. Физика атмосферы / Л.Т. Матвеев. – Л., 1965; – СПб.: Гидрометеиздат, 2000. – 751 с.
2. Методические рекомендации метеоподразделениям авиации Вооруженных Сил Российской Федерации. – М.: Воениздат, 1994. – 196 с.
3. Руководство по краткосрочным прогнозам погоды. – Л.: Гидрометеиздат, 1986. Ч. I. – 702 с.
4. Назаренко А.В. Опасные природные явления. Часть III: Опасные явления погоды конвективного происхождения: учеб.-метод. пособие для вузов / А.И. Назаренко. Воронеж: Издательско-полиграфический центр Воронежского государственного университета, 2008. – 62 с.

Воронежская государственная лесотехническая академия

Краснодарское высшее военное авиационное училище летчиков (ВИ) (г. Борисоглебск)

## MATHEMATICAL MODELS FOR AUTOMATED DESIGN WEATHER FORECASTING

A.D. Danilov, A.V. Pileich

In article offered the option of automating operational weather reports of dangerous weather phenomena like storms, hail, rain, storm. Examples of calculations of the convection and the discriminant function calculation methods

Key words: automated design, discriminant function, the parameters of convection, hazardous weather phenomena